

Prof. Dr. Alfred Toth

Triangulierte Kategorien in der Semiotik

1. Unter einem Triangel (X, Y, Z, u, v, w) versteht man in der neueren Kategoriethorie eine Menge von 3 Objekten X, Y, Z zusammen mit einem Morphismus u von $X \rightarrow Y$, einem Morphismus v von $Y \rightarrow Z$ und einem Morphismus w von $X \rightarrow Z$; die Zahl in Klammern gibt die Drehrichtung an:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1].$$

Dieser Triangel kann auf zwei Weisen rotiert werden:

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \quad \text{or} \quad Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z.$$

Triangulierte Kategorien können mit folgendem kommutativen Diagramm dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

2. Es ist leicht einzusehen, dass triangulierte Kategorien eine Möglichkeit darstellen, Zeichenklassen zusammen mit ihren Realitätsthematiken einzuführen, so zwar, dass die sog. Translationsmorphisemen f, g, h bzw. $f[1]$ der semiotischen Dualisationsoperation korrespondieren. Wenn $Zkl = (3.a \ 2.b \ 1.c)$ und $Rth = (c.1 \ b.2 \ a.3)$ die allgemeinen Formen von Zeichenklasse und Realitätsthematik darstellen, dann kann man ein Peircesches Dualsystem wie folgt als triangulierte Kategorie darstellen:

$$(1.c) \rightarrow_u (2.b) \rightarrow_v (3.a) \rightarrow_w (1.c \ 2.b \ 3.a)[1]$$

$$\downarrow_f \quad \downarrow_g \quad \downarrow_h \quad \downarrow_{f[1]}$$

$$(c.1) \rightarrow_{u'}(b.2) \rightarrow_{v'}(a.3) \rightarrow_{w'}(c.1 \ b.2 \ a.3)'[1]$$

Mit umgekehrtem Drehsinn, d.h.

$$Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z.$$

haben wir also

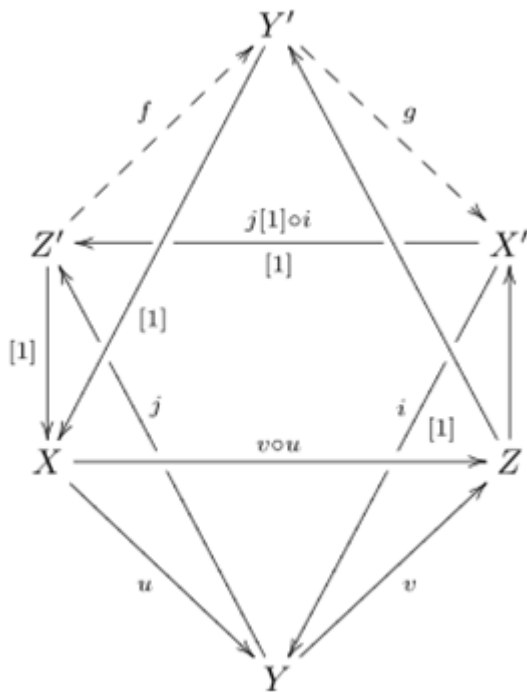
$$(1.c \ 2.b \ 3.a)[-1] \rightarrow_{-w[-1]} (1.c) \rightarrow_u (2.b) \rightarrow_v (3.a),$$

wobei natürlich

$$(1.c \ 2.b \ 3.a)[-1] = (c.1 \ b.2 \ a.3)$$

und damit nichts anderes als die Realitätsthematik ist.

3. Zeichnet man alle Elemente einer triangulierten Kategorie in einem Diagramm ein, so erhält man einen Oktaeder:



wobei es offenbar keine Möglichkeit einer 2-dimensionalen Darstellung gibt (Kashiwara und Schapira 2006, S. 244).

Bibliographie

Kashiwara, Masaki/Schapira, Pierre, Categories and Sheaves. New York 2006

9.12.2010